



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

El problema de la determinación de órbitas.

Autor/es

LAURA GARCÍA CASTILLO

Director/es

VÍCTOR LANCHARES BARRASA

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18



El problema de la determinación de órbitas., de LAURA GARCÍA CASTILLO (publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Falcultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO Grado en Matemáticas

El problema de la determinación de órbitas

Alumno: Laura García Castillo

Tutor: Víctor Lanchares Barrasa

Curso académico: 2017/2018

Resumen

Desde que el ser humano pisó la Tierra ha contemplado el Universo, es tal la curiosidad que provoca y lo misterioso de su existencia que desde tiempos inmemoriales el hombre se ha dedicado a estudiarlo e intentar comprender su complejo funcionamiento.

A lo largo de esta memoria intentaremos entender un poco más el movimiento de los cuerpos celestes, en concreto se tratará un problema clásico de la Mecánica Celeste, como es la determinación de una órbita trazada por un objeto que gira alrededor del Sol a partir de un conjunto de observaciones. Este problema no es tan sencillo como puede parecer inicialmente, ya que debemos tener en cuenta varios factores como que las observaciones no incluyen la distancia al objeto y que éstas se hacen desde la Tierra, cuyo movimiento propio dificulta el cálculo de la órbita. Para abordar este problema deberemos comprender el *problema de dos cuerpos*, el cual obedece las leyes de Kepler. A continuación, de entre todos los métodos existentes, en este trabajo estudiaremos más a fondo el método de Gauss para la determinación de órbitas a partir de tres observaciones, y finalmente haremos una breve comparación con un método de cálculo de órbitas a partir de más de tres observaciones, como es el método de Herget.

Summary

Since the human being stepped on the planet Earth, he has looked at the Universe, its mysterious existence and the curiosity it causes them is so much that the humans have dedicated themselves to study it and to try to understand its complex running since immemorial times.

Throughout this report, we are going to try to understand a bit more the celestial bodies's movement, in particular, we are going to study a classic problem of Celestial Mechanics. This problem is the determination of an orbit, drew by an object that revolves around the Sun, based on a set of observations. This problem is not as easy as it can seem at the beginning, because we have to bear in mind that the observations doesn't include the distance of the object and that we have to make this observations from the Earth, whose own movement could make difficult the orbit determination. To deal with this problem we have to understand *the two-body problem* which obeys Kepler's laws. We are going to study Gauss's Method below. This method is about the determination of an orbit based on three observations, and finally, we are going to compare briefly, this method to another method which uses more than three observatios, this is Herget's method.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Elementos orbitales	3
1.2. Sobre la determinación de órbitas	4
2. Sistemas de coordenadas celestes	7
2.1. Coordenadas horizontales	8
2.2. Coordenadas ecuatoriales locales	9
2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas	9
2.4. Coordenadas eclípticas	10
2.5. Relación entre los sistemas de coordenadas	10
3. El problema de dos cuerpos	13
3.1. Leyes de Kepler y Ley de gravitación de Newton	13
3.2. El problema de dos cuerpos	14
3.3. Las funciones f y g	20
4. El método de Gauss	23
4.1. Introducción al método de Gauss	23
4.2. Obtención de los vectores de posición	25
4.3. Cálculo de los elementos orbitales	29
4.4. Método de Herget	36
Bibliografía	41

Capítulo 1

Introducción

La madrugada del 1 de enero de 1801, el primer día del siglo diecinueve, algo diferente en el cielo cambió la rutina del padre Giuseppe Piazzi que, mirando a través de su telescopio, descubrió lo que parecía un pequeño punto de luz en mitad de la noche. Piazzi anotó sus coordenadas respecto al resto de estrellas. A la noche siguiente, volvió a ver el mismo punto de luz y, al anotar su posición y compararla con la del día anterior, vio que ésta ya no era la misma y que el objeto había cambiado ligeramente su posición [6].

En esa misma época, tras el descubrimiento de Urano en 1781, se conjeturaba, por parte de la comunidad científica europea, la existencia de un planeta entre las órbitas de Marte y Júpiter. Esta conjetura estaba fundamentada en la ley de Titius-Bode, una curiosidad matemática, encontrada por ambos astrónomos en 1772, que relaciona la distancia de los planetas al Sol a través de una sencilla fórmula. Si a es la distancia del planeta al Sol, entonces

$$a = \frac{3 \cdot 2^n + 4}{10}, \quad n = -\infty, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Para los planetas conocidos en 1772, la fórmula funcionaba bien asignando a Mercurio $n = -\infty$, a Venus $n = 0$, a la Tierra $n = 1$, a Marte $n = 2$, a Júpiter $n = 4$ y a Saturno $n = 5$. Esto no habría dejado de ser más que un mero pasatiempo de no ser porque el recién descubierto Urano se ajustaba también a esta ley con $n = 6$. Puesto que la ley era anterior a su descubrimiento, parecía lógico pensar que debería haber un planeta perdido entre Marte ($n = 2$) y Júpiter ($n = 4$). Así que, un grupo de 24 astrónomos iniciaron su búsqueda, dirigidos por el Barón Xaver von Zach, director del observatorio de Seeberg, en Gotha, y editor de la revista de astronomía *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde*.

Resultó que este objeto fue el que observara Piazzi el 1 de enero de 1801 y que acabaría por denominarse Ceres. Durante los días siguientes, Piazzi siguió observando este nuevo objeto y anotando los cambios en su posición. Esta quedaba determinada mediante la intersección de dos círculos o circunferencias sobre una esfera imaginaria, denominada esfera celeste; una esfera ideal, sin radio definido y concéntrica con el globo terrestre. Estos círculos son similares a los paralelos y meridianos que se usan para determinar la posición de un punto sobre la superficie terrestre.

Piazzi fue capaz de registrar un total de 19 observaciones en los 42 días posteriores al descubrimiento de Ceres, hasta que éste se aproximó demasiado al Sol y desapareció. Al principio, Piazzi pensó que había descubierto un pequeño cometa sin cola; más tarde él y otros astrónomos creyeron que podría tratarse del planeta que creían se encontraba entre Marte y Júpiter. Sin embargo, esto no podría saberse hasta que no se conociera la trayectoria que describía y cuándo y dónde podría, por tanto, verse de nuevo.

Piazzi envió algunas cartas con su descubrimiento a varios colegas en Berlín, Milán y París, que llegaron varios meses tarde. En ellas, Piazzi se refería al objeto como un cometa o un planeta. Fue por estas cartas por las que el descubrimiento de Piazzi llegó a oídos de von Zach, quien publicó en junio un extenso artículo en el *Monatliche Correspondenz* sobre el supuesto descubrimiento de un nuevo planeta en nuestro sistema solar situado entre Marte y Júpiter. La noticia se difundió entre los astrónomos más destacados de Europa. En julio, von Zach publicó una posible órbita de Ceres calculada por el astrónomo Burckhardt. En los meses posteriores, varios astrónomos aguardaron la reaparición de este objeto en su supuesta órbita, pero sus esfuerzos fueron en vano y, a menos que se determinase su trayectoria real, volver a encontrarlo sería prácticamente imposible.

La única experiencia previa en determinar la trayectoria de un nuevo objeto celeste fue en 1781 con el descubrimiento de Urano por William Herschel. En este caso se pudo observar el planeta durante bastante tiempo, registrando cambios en su posición respecto a la Tierra. Para determinar su órbita, probaron con diferentes curvas para ver cuál se adaptaba mejor a los puntos que habían obtenido, con tanta suerte que la órbita de este planeta era prácticamente circular. Pero, por desgracia, este método no era útil en el caso de Ceres.

En esta época se sabía que objetos como los cometas describían órbitas diferentes a la de los planetas, pero siempre describiendo una cónica, siendo el Sol uno de sus focos. Cuanto más se desviara la trayectoria de una circunferencia más difícil resultaría determinar la trayectoria del objeto que descubrió Piazzi.

Fue en este momento en el que Gauss se interesó por el problema, que con 24 años vivía en Brunswick en el completo anonimato recién terminado sus estudios de doctorado. Gauss calculó una órbita muy diferente a las calculadas anteriormente por otros astrónomos de renombre como Olbers, Bode, Burckhardt y el propio Piazzi. La órbita obtenida por Gauss la publicó von Zach en su revista y, poco después, el joven astrónomo Wilhelm Olbers redescubrió Ceres dentro de la órbita calculada por Gauss.

¿Qué hizo Gauss que otros astrónomos no hicieron para determinar la trayectoria del nuevo planeta? Para empezar, Gauss adoptó la hipótesis kepleriana de que el movimiento de un objeto celeste queda determinado, de manera única, por su órbita. No es necesario conocer más información sobre éste. Además, Gauss demostró que la órbita y el movimiento orbital se puede determinar en su totalidad por la curvatura interna de un pequeño fragmento. Por lo tanto,

podríamos afirmar que es la órbita la que dicta cómo se mueve el planeta y no al contrario.

Gauss adoptó además otra hipótesis conocida, pero crucial, derivada de las leyes de Kepler: la órbita de cualquier objeto que no pase extremadamente cerca de otro cuerpo en nuestro sistema solar, tiene la forma de una sección cónica cuyo foco se sitúa en el centro del sol. Sabiendo esto, el movimiento de un cuerpo queda determinado a partir de seis elementos, conocidos como elementos orbitales, que veremos a continuación.

1.1. Elementos orbitales

Los elementos orbitales clásicos son los que encontramos habitualmente en los anuarios astronómicos y que definen de manera única la trayectoria que describe el objeto. Para ello se necesita un sistema de referencia, que en nuestro caso va a ser el eclíptico, donde el origen de coordenadas está en el Sol. El plano xy es el plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que se denomina plano de la eclíptica. El eje x está dirigido hacia el punto vernal o punto Aries, que es el punto de la órbita de la Tierra en el que, aparentemente, el Sol pasa de estar por debajo del ecuador terrestre a estar por encima de éste. El eje z es perpendicular al plano de la eclíptica, de manera que se encuentre en el mismo hemisferio que el polo norte celeste. Por último, el eje y se toma para tener un sistema de referencia dextrógiro. Ahora podemos definir los elementos necesarios para describir completamente la órbita de la siguiente manera (ver la Figura 1.1):

- Dos ángulos para determinar la posición del plano orbital del objeto respecto al plano xy o plano de la eclíptica. Estos ángulos son la *inclinación*, i , y el *ángulo del nodo*, Ω . El primero de ellos es el ángulo formado por el plano de la órbita y el plano xy . El segundo de ellos es el ángulo formado por el eje x y la línea de los nodos, que es la recta de intersección del plano orbital y el plano de la eclíptica (xy). Este ángulo se mide hasta el nodo ascendente, cuando el objeto pasa de estar por debajo del plano de la eclíptica a estar por encima de ella.
- Dos parámetros para determinar el tamaño y la forma de la cónica. Estos parámetros, en el caso de una elipse, son el semieje mayor de la elipse, que se denota por a y la excentricidad de la misma, que se denota por e .
- Un ángulo para determinar la posición de la cónica dentro del plano orbital. Este ángulo es el denominado *argumento del perihelio*, que se denota por ω . Es el ángulo que forman la línea de los nodos y el eje mayor de la elipse (en concreto hasta la parte del semieje que se encuentra más cerca del origen de coordenadas).
- Por último es necesario un parámetro dinámico, conocido como la *época de paso por el perihelio*, T , que es el instante en el que el objeto se encuentra en su distancia más próxima al Sol.

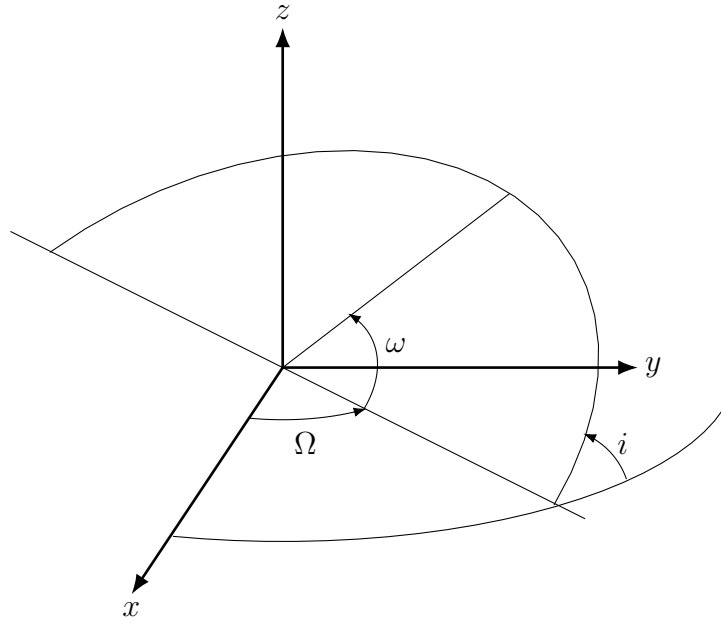


Figura 1.1: Elementos orbitales

El movimiento completo de un cuerpo está determinado por estos seis elementos orbitales y por la acción de las leyes de Kepler.

1.2. Sobre la determinación de órbitas

Gracias al desarrollo de la Mecánica Celeste, la órbita de la Tierra y su posición con respecto al Sol en cualquier momento del año son conocidas con precisión. Por lo tanto, la posición que ocupaba la Tierra en el espacio, cuando Piazzi obtuvo sus observaciones, se conocían con un grado muy alto de exactitud. Sin embargo, no podemos decir lo mismo de las posiciones del objeto observado. En realidad, para cada una de las observaciones, lo único que se podía saber es que el objeto observado se encontraba en algún punto de la línea que une el observatorio de Palermo, desde donde Piazzi hizo sus medidas, con el punto de la esfera celeste en el que aparecía proyectado el objeto. Es justo aquí donde se encuentra la dificultad del problema de obtener la trayectoria de Ceres, o cualquier otro objeto del sistema solar, alrededor del Sol.

Si el conjunto de observaciones es muy grande, y abarca más de una revolución del objeto alrededor del Sol, el problema podía atacarse mediante un ingenioso método ideado por Kepler y que comentaremos en la introducción del capítulo 4. Sin embargo, en el caso de Ceres esto no era así. Apenas existían observaciones de un pequeño fragmento de su trayectoria por la esfera celeste. Ante tal escasez de datos, cualquier intento de ajustar una curva a estos puntos fallaba. Los astrónomos procedían por prueba y error, buscando órbitas similares a las de los objetos conocidos, es decir, próximas a una circunferencia y casi coplanarias con la de la Tierra. Estas suposiciones reducían el número

de posibilidades y, por tanto, reducían también al mínimo el procedimiento de prueba y error. Curiosamente, el método de Gauss no se basaba en este procedimiento. Gauss no necesitó suponer que la órbita tenía una forma particular. Él únicamente utilizó tres observaciones cuidadosamente seleccionadas y fue capaz de construir una buena primera aproximación de la órbita de Ceres, lo que hizo posible su redescubrimiento. Su idea, como ya se ha comentado antes, es que la órbita debe cumplir con las leyes de Kepler y que son estas leyes las que van a determinar la trayectoria del objeto. Aplicándolas convenientemente, es posible obtener los 6 elementos orbitales y, por tanto, conocer la trayectoria completa del objeto alrededor del Sol.

Capítulo 2

Sistemas de coordenadas celestes

El primer paso para poder dar con precisión las coordenadas de un objeto celeste pasa por establecer unos sistemas de referencia adecuados en los que fijar su posición. Por un lado, debemos tener bien ubicada la posición del observador sobre la superficie terrestre y, por otro, la posición del objeto en un sistema centrado en el propio observador, o bien en el centro de la Tierra.

Son bien conocidas las coordenadas que determinan la posición de un punto sobre la Tierra. Son las llamadas *coordenadas geográficas* y, suponiendo la Tierra esférica, vienen dadas por dos ángulos a los que denominamos *latitud* y *longitud*. Para establecer estos ángulos se usan como referencia dos círculos máximos ortogonales entre sí: el meridiano de Greenwich, el círculo máximo que pasa por los polos y la localidad inglesa de Greenwich, y el ecuador terrestre, círculo máximo ortogonal al anterior.

Los sistemas de coordenadas astronómicos no son más que una generalización del sistema de coordenadas geográficas. En este sentido, situamos a todos los objetos celestes sobre una esfera imaginaria centrada en el observador, a la que anteriormente hemos llamado esfera celeste. En el caso de que los objetos que se consideren estén muy lejanos, puede suponerse que el centro de la esfera coincide con el de la Tierra. Sobre esta esfera imaginaria, la posición de un astro vendrá dada por dos ángulos, similares a la latitud y la longitud. Ahora bien, debemos fijar los planos de referencia a los que vamos a referir estos ángulos. Según sean estos planos se pueden establecer diferentes sistemas de coordenadas, y cada uno de ellos se usará en función del objeto que queramos posicionar y la información que se requiera de él. Para posicionar los objetos del sistema solar se usan dos tipos de sistemas de referencia: el *sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas* y el *sistema de coordenadas eclípticas*. En estos dos sistemas las coordenadas del objeto son independientes del observador, a diferencia del otro sistema habitual, que es el *horizontal*. A continuación describiremos estos sistemas de referencia, pero para más información sobre los mismos se puede consultar [1,3].

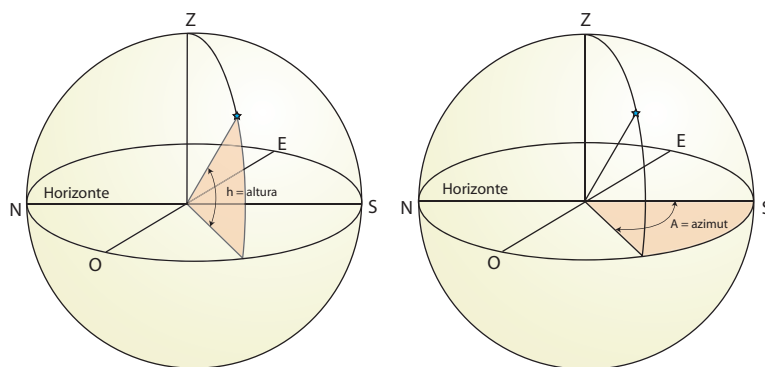


Figura 2.1: Coordenadas Horizontales

2.1. Coordenadas horizontales

Las coordenadas horizontales (Fig. 2.1) son un sistema de coordenadas celestes cuyo plano de referencia es el que mejor podemos localizar: el del horizonte. La recta perpendicular a este plano es la vertical, que determina el eje z de nuestro sistema de referencia. Sobre el plano del horizonte se fijan los ejes x e y , de manera que el eje x lleva la dirección norte-sur, siendo el sentido positivo hacia el sur, mientras que el eje y va en dirección este-oeste, con dirección positiva hacia el oeste.

Si prolongamos el eje z corta a la esfera celeste en dos puntos, uno en la mitad superior, llamado *zenit*, y el opuesto a este punto que se denomina *nadir*, situado en la mitad inferior.

Podríamos dar la posición de cualquier astro mediante un punto con coordenadas (x, y, z) , o con dos ángulos, azimut (A) y altura (h). El azimut se mide siguiendo la línea del horizonte en sentido horario, desde el punto cardinal Sur, hasta el lugar situado debajo del astro que queremos observar. El azimut es positivo en el sentido de las agujas del reloj, que es en el sentido contrario al movimiento aparente de la bóveda celeste. La altura se mide desde el horizonte hasta la posición del astro, siguiendo una línea imaginaria que llega hasta el zenit. Ambas coordenadas se miden en grados, minutos y segundos de arco. La altura es positiva sobre el horizonte, y negativa por debajo de él, en cuyo caso se llama depresión.

Este sistema de referencia presenta un problema, y es que los ángulos h y A varían por la rotación del globo terráqueo y también son dependientes de la posición del observador sobre la superficie terrestre, ya que el plano del horizonte no es el mismo para todos los observadores. Por tanto, habría que buscar sistemas de referencia que no tengan esta problemática. Podemos encontrar un sistema de referencia de manera que el plano fundamental deje de ser el plano del horizonte y sea uno común para todos los observadores. Entre estos nuevos sistemas se encuentran los ecuatoriales, que pasamos a describir.

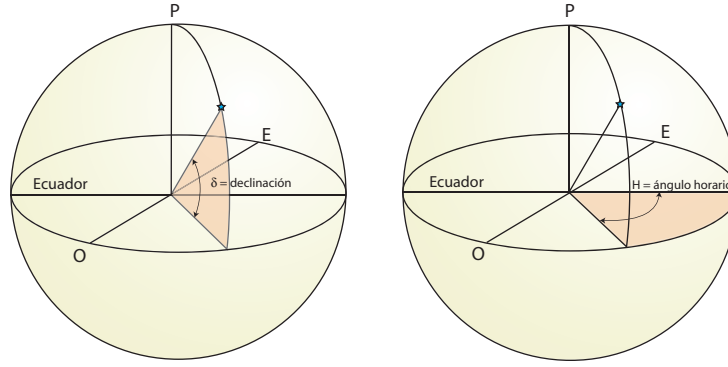


Figura 2.2: Coordenadas Ecuatoriales Locales

2.2. Coordenadas ecuatoriales locales

Las coordenadas ecuatoriales locales (Fig. 2.2) son un tipo de coordenadas celestes que tienen como plano de referencia el plano del Ecuador. En este sistema de referencia, el eje z es paralelo al eje de rotación terrestre, con sentido positivo hacia el norte. Los ejes x e y se encuentran en el plano ecuatorial, éstos coinciden con el eje x del sistema de coordenadas horizontales, y con la proyección de la dirección norte-sur sobre el plano ecuatorial respectivamente, siendo hacia el sur el sentido positivo.

Las coordenadas ecuatoriales locales de un cuerpo celeste se miden mediante dos arcos que se denominan declinación y ángulo horario.

El ángulo horario (H) es el ángulo formado por el meridiano que pasa por el zenit y el que pasa por el astro. Aunque se podría medir en grados, las unidades de medida que se usan son la hora, que equivale a 15° , el minuto y el segundo, de manera que una hora tiene 60 minutos y el minuto 60 segundos.

La declinación (δ) es el arco que va desde el ecuador hasta el punto donde se encuentra el objeto observado. Nos da la altura desde el ecuador. Si el objeto está situado entre el ecuador y el polo norte, la declinación será positiva, en caso contrario, negativa. La declinación se mide en grados y es equivalente a la latitud geográfica.

En este sistema de referencia, la declinación es constante mientras que el ángulo horario varía de 0 a 24 horas en un día. Esto es así, porque el meridiano que pasa por el zenit depende del observador y describe una revolución alrededor del eje z cada 24 horas. El siguiente paso es definir un sistema de coordenadas absolutas.

2.3. Coordenadas ecuatoriales absolutas

Las coordenadas ecuatoriales absolutas, como acabamos de comentar, surgen por los inconvenientes que presenta el uso de las coordenadas ecuatoriales locales, ya que el ángulo horario depende de la posición de cada observador. El eje y plano de referencia de este sistema de coordenadas son los mismos que en

el sistema ecuatorial local: el eje de rotación terrestre y el plano del Ecuador respectivamente.

Las coordenadas ecuatoriales absolutas son la declinación (δ), que coincide con la definida para el sistema anterior, y la ascensión recta (α), que es el arco del ecuador celeste que va desde el punto Aries (γ), hasta el meridiano donde está situado el astro medido en sentido horario. Varía de 0 a 24 horas. El punto Aries es el punto que se definió previamente a la hora de describir los elementos orbitales.

La ascensión recta y el ángulo horario están relacionados por la ecuación

$$t = \alpha + H,$$

siendo t el tiempo sidéreo, que no es otra cosa que el ángulo horario del punto vernal.

Puesto que el punto Aries no depende del observador ni del instante en que se posiciona un objeto, estas coordenadas son, por tanto, universales y son las que se usan habitualmente para referir la posición de los objetos en la esfera celeste, bien sean estrellas, objetos del sistema solar u otros objetos de interés.

2.4. Coordenadas eclípticas

Para los cuerpos del sistema solar, que se mueven casi todos ellos en un plano cercano al que lo hace la Tierra alrededor del Sol y que denominamos eclíptica, se usan las coordenadas eclípticas. En este caso, el plano de referencia es el plano de la eclíptica y el eje x va dirigido en la dirección del punto Aries.

A la línea perpendicular al plano de la eclíptica se le llama eje de la eclíptica y al ángulo que forma la eclíptica con el ecuador celeste se le denomina oblicuidad de la eclíptica. Este es un ángulo que podemos considerar constante y que es igual a $\varepsilon = 23^\circ 27' 30''$

Las coordenadas eclípticas son la longitud eclíptica y la latitud eclíptica. La longitud eclíptica (λ) es el ángulo medido, sobre la eclíptica, que va del punto Aries hasta el círculo máximo de longitud del astro, medido en sentido directo o antihorario. Se mide en grados sexagesimales y su valor va de 0° a 360° . Por otra parte, la latitud eclíptica (β) es el ángulo que va desde el objeto celeste al plano de la eclíptica. Se mide en grados sexagesimales y su valor oscila entre 0° y 90° . Si se mide hacia el Norte será positivo y si es hacia el Sur, negativo.

2.5. Relación entre los sistemas de coordenadas

Los sistemas de referencia anteriores están relacionados entre sí mediante rotaciones. Puede pasarse del horizontal al ecuatorial local mediante una rotación de eje y y ángulo $90^\circ - \phi$, donde ϕ es la latitud de lugar (Fig. 2.3).

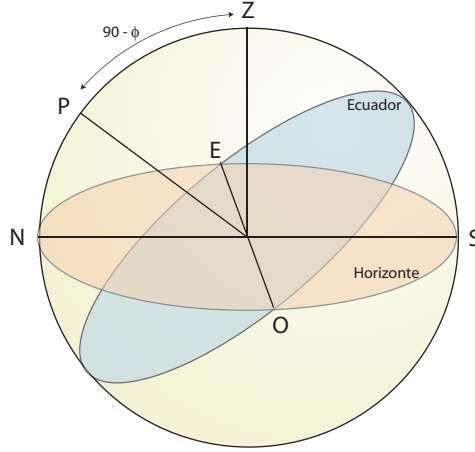


Figura 2.3: Relación entre los sistemas de referencia horizontal y ecuatorial local

De este modo, si (x_h, y_h, z_h) son las coordenadas horizontales de un cuerpo, y (x_e, y_e, z_e) las ecuatoriales locales del mismo, entonces

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Recordemos que la matriz de rotación alrededor del eje y con ángulo de giro θ , es la siguiente

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Por tanto, si multiplicamos $R_y(\theta)$, con ángulo $\theta = 90 - \phi$, por las coordenadas horizontales, obtendremos las coordenadas ecuatoriales locales.

$$\begin{cases} \cos H \cos \delta = \sin \phi \cos A \cos h + \cos \phi \sin h \\ \sin H \cos \delta = \sin A \cos h \\ \sin \delta = -\cos \phi \cos A \cos h + \sin \phi \sin h \end{cases} \quad (2.3)$$

Para hacer el cambio inverso, bastaría multiplicar las coordenadas ecuatoriales por la matriz de rotación con ángulo de giro $\phi - 90$.

Ya hemos visto la relación existente entre las coordenadas ecuatoriales locales y las absolutas, a través del tiempo sidéreo. Solo nos falta por ver cómo pasar de estas últimas a coordenadas eclípticas. En este caso, basta hacer una rotación de eje x y ángulo igual a la oblicuidad de la eclíptica. De este modo, la relación entre ambos sistemas de coordenadas queda como sigue

$$\begin{cases} \cos \lambda \cos \beta = \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \lambda \cos \beta = \cos \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta \\ \sin \beta = -\sin \varepsilon \sin \alpha \cos \delta + \cos \varepsilon \sin \delta \end{cases} \quad (2.4)$$

El cambio inverso se realiza multiplicando las coordenadas eclípticas por la matriz de rotación de eje x y ángulo $-\varepsilon$.

Capítulo 3

El problema de dos cuerpos

El movimiento de los planetas es un problema que ha suscitado gran interés a lo largo de la historia. Numerosos científicos han dedicado tiempo a este problema aparentemente simple, mas complejo en el fondo. Sin embargo a es a Kepler y a Newton a quienes debemos agradecerles las bases sobre la que se sustenta esta teoría.

En este capítulo intentaremos comprender las bases del movimiento planetario ya que luego nos serán de gran ayuda a la hora de determinar una órbita.

3.1. Leyes de Kepler y Ley de gravitación de Newton

Gracias a las observaciones realizadas por el astrónomo Tycho Brahe, su discípulo Johannes Kepler dedujo tres leyes que conocemos como *leyes de Kepler*, fundamentales en la explicación del movimiento de los planetas.

- Los planetas se mueven en órbitas planas alrededor del Sol, siendo las áreas descritas proporcionales a los tiempos empleados en describirlas.
- Las órbitas descritas por los planetas son elipses, de las cuales, el Sol ocupa un foco.
- Los cubos de los semiejes mayores de las órbitas planetarias son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlas

A pesar de que estas leyes son capaces de explicar el movimiento de los planetas, no dan una explicación física del porqué de éste. Fue Newton quien, gracias a las leyes de Kepler, enunció la que conocemos como *ley de gravitación universal*.

La ley de gravitación universal formulada por Isaac Newton postula que la fuerza que ejerce el Sol, con masa m_1 , sobre un planeta con masa m_2 es atractiva, lleva la dirección de ambos cuerpos y es proporcional al producto de

las masas de éstos, e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia mutua r . De aquí se deduce que

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.1)$$

donde G es la *constante de gravitación universal*, \mathbf{r} el vector de posición y r su módulo.

La ley anterior es la base de un problema fundamental de la Astrodinámica: el llamado *problema de dos cuerpos* que veremos a continuación.

3.2. El problema de dos cuerpos

El problema de dos cuerpos consiste en determinar el movimiento de dos masas puntuales S y P , de masas m_1 y m_2 respectivamente que interactúan gravitacionalmente según la ley de atracción universal de Newton.

Comencemos formulando este problema (Fig. 3.1). Para ello, vamos a considerar un sistema de referencia fijo $Oijk$, en el que llamaremos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 a los vectores de posición \overline{OS} y \overline{OP} respectivamente, y \mathbf{r} al vector de posición relativa \overline{SP} . De la ecuación anterior, junto con la segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m \cdot a$) se obtiene

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.3)$$

El problema puede reducirse a determinar el movimiento relativo de uno de los cuerpos respecto al otro. En efecto, consideremos el centro de masas del sistema

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Sumando las ecuaciones (3.2) y (3.3), se obtiene

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{r}}_c = 0. \quad (3.5)$$

Por tanto, obtenemos que $\ddot{\mathbf{r}}_c = 0$. Así, integrando, se tiene

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{v}_c(t - t_0),$$

donde \mathbf{v}_c es constante. De este modo, concluimos con que el centro de masas de un sistema formado por dos cuerpos, que se atraen según la ley de gravitación de Newton, se mueve con un movimiento rectilíneo y uniforme.

Por otra parte,

$$(m_1 + m_2) \mathbf{r}_c = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (3.7)$$

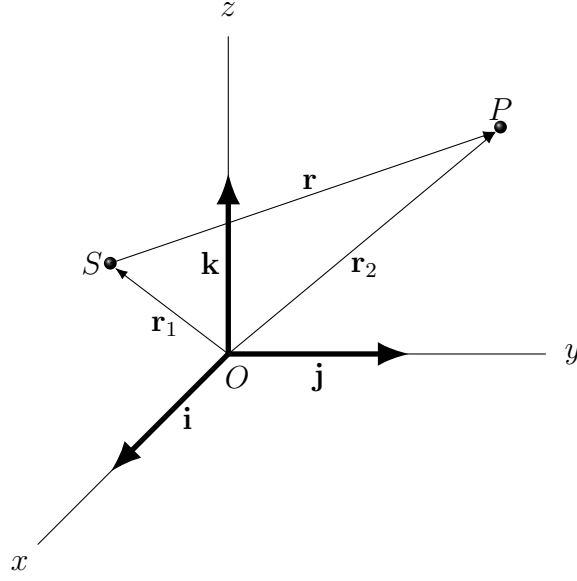


Figura 3.1: Problema de dos cuerpos

que podemos reescribir de la siguiente forma

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_c - \frac{m_2}{m_1 m_2} \mathbf{r}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_c + \frac{m_1}{m_1 m_2} \mathbf{r}. \quad (3.9)$$

Así, una vez que conozcamos la evolución temporal del vector del centro de masas \mathbf{r}_c y la del vector de posición relativa \mathbf{r} , obtendremos los valores de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y el problema quedará resuelto. Ahora bien, ya conocemos el movimiento de \mathbf{r}_c , con lo que bastará encontrar el movimiento relativo de P con respecto de S . Para hallarlo, tomamos la segunda derivada con respecto del tiempo de la ecuación (3.7)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1, \quad (3.10)$$

y en ella sustituimos los valores de las segundas derivadas dados en (3.2) y (3.3), llegando a

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{m_2} G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{m_1} G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.11)$$

operando queda

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \left(G \frac{m_1 m_2}{m_1} + G \frac{m_1 m_2}{m_2} \right), \quad (3.12)$$

y así obtenemos las ecuaciones del movimiento relativo, que se escriben de la siguiente forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.13)$$

donde $\mu = G(m_1 + m_2)$.

Dado que $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ y que la ecuación del movimiento relativo es una ecuación diferencial de segundo orden, necesitamos seis constantes de integración para completar la solución de este problema. Encontrar estas constantes constituye el núcleo del problema de dos cuerpos. Las primeras tres constantes de integración las podemos obtener multiplicando vectorialmente por \mathbf{r} en la ecuación (3.13), de donde se obtiene

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0, \quad (3.14)$$

e integrando queda

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}, \quad (3.15)$$

siendo \mathbf{h} un vector constante que nos da tres de las seis constantes que necesitamos. Esta ecuación nos muestra que el momento angular es constante y que el movimiento tiene lugar en un plano.

Las siguientes constantes aparecen al multiplicar vectorialmente por \mathbf{h} la ecuación (3.13). Pero antes vamos a tener en cuenta la siguiente observación:

Observación 1. Sean \mathbf{a} , \mathbf{b} , y \mathbf{c} tres vectores, entonces $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Demostración. Sean \mathbf{a} , \mathbf{b} , y \mathbf{c} tres vectores tales que

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3).$$

Para el producto vectorial $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ se tiene

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}.$$

Del mismo modo, para el producto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3))\mathbf{i} + \\ &\quad (a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1))\mathbf{j} + \\ &\quad (a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2))\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Reordenando las componentes del vector resultante, vemos que la primera, la segunda, y la tercera componente quedan como sigue

$$\begin{aligned} &(a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1, \\ &(a_3c_3 + a_1c_1)b_2 - (a_3b_3 + a_1b_1)c_2, \\ &(a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. □

Continuemos ahora con nuestro problema, es decir, multiplicando vectorialmente por \mathbf{h} la ecuación (3.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{h} \times \mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3} (r^2 \dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\mu}{r^3} (r^2 \dot{\mathbf{r}} - (r\dot{r})\mathbf{r}) = -\mu \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right) = -\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ &= -\mu \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \end{aligned}$$

con $\hat{\mathbf{r}}$ el vector unitario en la dirección de \mathbf{r} .

Integrando el resultado anterior obtendremos

$$\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} = -\mu \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{P}, \quad (3.16)$$

siendo \mathbf{P} un vector constante. Sus componentes no son independientes, ya que $\mathbf{h} \cdot \mathbf{P} = 0$. Por tanto, solo nos proporcionará dos de las tres constantes de integración que nos faltan.

Las ecuaciones (3.15) y (3.16) resumen las leyes de Kepler, de hecho la conservación del momento angular es equivalente a la ley de las áreas, además de indicar que el movimiento tiene lugar en un plano. Por otra parte, como veremos a continuación, de (3.16) se deduce que el movimiento tiene lugar a lo largo de una cónica. En efecto, multiplicando escalarmente (3.16) por \mathbf{r} quedará

$$\frac{h^2/\mu}{r} = 1 + \frac{\mathbf{P}}{\mu} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.17)$$

Sea v el ángulo formado por $\hat{\mathbf{r}}$ y \mathbf{P} , entonces (3.17) puede escribirse como sigue

$$\frac{h^2/\mu}{r} = 1 + \frac{P}{\mu} \cdot \cos v, \quad (3.18)$$

o bien como

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (3.19)$$

donde

$$e = \frac{P}{\mu}, \quad p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2). \quad (3.20)$$

De este modo vemos que (3.19) es la ecuación de una cónica en coordenadas polares. En el caso de que sea una elipse, que es el caso que consideraremos aquí, a es el semieje mayor de la elipse y e la excentricidad. Por otra parte, el vector \mathbf{P} es un vector que va en la dirección del perihelio, el punto de la órbita más próximo al Sol, y el ángulo v se mide desde el perihelio en la dirección del movimiento. A v se le conoce como *anomalía verdadera*, y es el ángulo que parametriza la elipse en coordenadas polares.

La última constante del movimiento la hallaremos integrando la ecuación que expresa que el módulo del momento angular es constante. Esta ecuación podemos escribirla como

$$r^2 \frac{dv}{dt} = h = \sqrt{p\mu} \quad (3.21)$$

Si tomamos r de la ecuación (3.19) y la sustituimos en la ecuación anterior quedará

$$\frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt \quad (3.22)$$

Esta ecuación sería fácilmente integrable para $e = 0$ (órbita circular), y para $e = 1$ (órbita parabólica), pero nosotros nos centraremos en el caso elíptico.

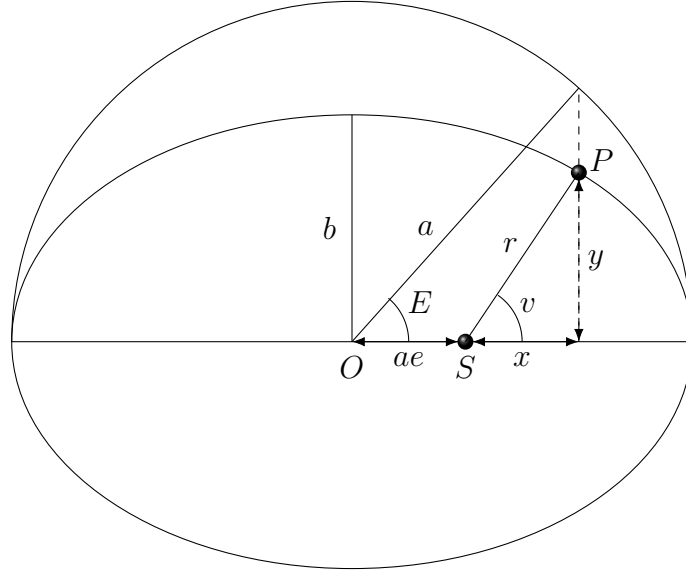


Figura 3.2: Relación entre la anomalía excéntrica y la anomalía verdadera.

Tomemos la ecuación (3.15) y elevémosla al cuadrado

$$h^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 \quad (3.23)$$

$$= \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r}^2 - (r\dot{r})^2. \quad (3.24)$$

De (3.16) y (3.20) resulta

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

y, por tanto,

$$\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) r^2 - r^2 \dot{r}^2 = \mu a(1 - e^2). \quad (3.25)$$

Vamos a dar ahora una nueva parametrización de la elipse mediante un nuevo ángulo conocido como *anomalía excéntrica* al que denotaremos con la letra E . Para ello expresamos la ecuación de la elipse respecto a su centro, entonces

$$\xi = a \cos E, \quad \eta = b \sin E,$$

de manera que

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Por otra parte, la relación entre ξ , η con las coordenadas polares x , y , véase la Figura 3.2, viene dada por

$$x = r \cos v = \xi - ae = a(\cos E - e), \quad y = r \sin v = \eta = b \sin E.$$

De lo anterior se sigue que

$$r^2 = x^2 + y^2 = (\xi - ae)^2 + \eta^2 = (a \cos E - ae)^2 + b^2 \sin^2 E.$$

Teniendo en cuenta que $b^2 = a^2(1 - e^2)$ resulta

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 \cos^2 E + a^2 e^2 - 2a^2 e \cos E + a^2 \sin^2 E - a^2 e^2 \sin^2 E \\ &= a^2 + a^2 e^2 \cos^2 E - 2a^2 e \cos E = a^2(1 - e \cos E)^2 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (3.26)$$

donde E es el ángulo medido desde el centro de la elipse. Derivando la ecuación anterior y sustituyendo en (3.25) obtendremos

$$\frac{a^3}{\mu} \dot{E}^2 (1 - e \cos E)^2 = 1, \quad (3.27)$$

de donde, teniendo en cuenta que dE/dt es positivo, resulta

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (1 - e \cos E) dE, \quad (3.28)$$

de donde es fácil deducir que $\dot{E} = na/r$. Por otra parte, integrando la ecuación en un periodo, es decir cuando E varía entre 0 y 2π , obtendremos

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (3.29)$$

Sea n el movimiento medio definido como

$$n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad (3.30)$$

entonces la ecuación (3.28) puede escribirse de la siguiente forma

$$ndt = (1 - e \cos E) dE \quad (3.31)$$

e integrando quedará

$$n(t - T) = E - e \sin E. \quad (3.32)$$

T es la última constante de integración, y es la época de paso por el perihelio. Al ángulo $M = n(t - T)$, se le denomina *anomalía media* y representa el ángulo girado desde el instante de paso por el perihelio suponiendo que el movimiento es uniforme. La ecuación (3.32) puede expresarse como

$$M = E - e \sin E \quad (3.33)$$

y se conoce como ecuación de Kepler.

3.3. Las funciones f y g

Las funciones f y g de Lagrange, también llamadas *coeficientes de transición*, son muy útiles para comprender algunas propiedades del movimiento planetario y además son la base de algunos métodos de determinación de órbitas como es el método de Gauss [2]. Vamos a estudiarlas a continuación

En primer lugar, descomponemos la ecuación diferencial (3.13) en dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}\end{aligned}\tag{3.34}$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición y \mathbf{v} el vector velocidad cuya norma denotaremos por v . Estas ecuaciones tendrán una única solución para un conjunto de condiciones iniciales dado por el vector de posición \mathbf{r}_0 , y el de velocidad \mathbf{v}_0 en un instante t_0 .

Ya que las soluciones del problema van a estar en un plano fijo y que \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 forman una base de éste al ser linealmente independientes, entonces existirán dos escalares f y g tales que

$$\mathbf{r} = f(t; t_0)\mathbf{r}_0 + g(t; t_0)\mathbf{v}_0.\tag{3.35}$$

Estas funciones escalares son independientes del sistema de referencia usado, por lo que podemos usar el sistema de referencia orbital. Así, $\mathbf{r} = (X(t), Y(t))$ y $\mathbf{v} = (\dot{X}(t), \dot{Y}(t))$ y entonces

$$\begin{cases} X(t) = fX(t_0) + g\dot{X}(t_0), \\ Y(t) = fY(t_0) + g\dot{Y}(t_0), \end{cases}\tag{3.36}$$

de donde resulta

$$\begin{cases} f = \frac{1}{D}[X(t)\dot{Y}(t_0) - Y(t)\dot{X}(t_0)] \\ g = \frac{1}{D}[Y(t)X(t_0) - X(t)Y(t_0)] \end{cases}\tag{3.37}$$

siendo $D = X(t_0)\dot{Y}(t_0) - Y(t_0)\dot{X}(t_0)$.

f y g pueden expresarse en términos de la anomalías excéntricas E y E_0 . Teniendo en cuenta que $X = a \cos E - ae$ e $Y = b \sin E$ se obtiene

$$\begin{cases} f = \frac{a}{r_0}[\cos(E - E_0) - 1] + 1 \\ g = t - t_0 + \frac{1}{n}[\sin(E - E_0) - (E - E_0)] \end{cases}\tag{3.38}$$

donde se hace uso de la relación $\dot{E} = na/r$ descrita anteriormente.

Así pues, dadas f y g , la ecuación (3.35) podría considerarse la solución de la ecuación diferencial (3.13), donde \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 son constantes arbitrarias. Por

otra parte, la velocidad en función del tiempo vendrá dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\partial f(t, t_0)}{\partial t} \mathbf{r}(t_0) + \frac{\partial g(t, t_0)}{\partial t} \mathbf{v}(t_0), \quad (3.39)$$

que podemos escribir de la siguiente forma

$$\mathbf{v}(t) = \dot{f} \mathbf{r}_0 + \dot{g} \mathbf{v}_0. \quad (3.40)$$

A partir de (3.38) obtenemos

$$\begin{cases} \dot{f} = -\frac{a}{r} \frac{a}{r_0} n \sin(E - E_0), \\ \dot{g} = \frac{a}{r} [\cos(E - E_0) - 1] + 1. \end{cases} \quad (3.41)$$

Por último, las funciones f y g pueden escribirse en forma de series [4], donde

$$\begin{cases} f = 1 - \frac{1}{2}\sigma(t - t_0)^2 + \frac{1}{2}\sigma\tau(t - t_0)^3 + \dots \\ g = (t - t_0) - \frac{1}{6}\sigma(t - t_0)^3 + \dots \end{cases} \quad (3.42)$$

con $\tau = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{r_0^2}$ y $\sigma = \frac{\mu}{r_0^3}$. Nótese que σ será en general una cantidad pequeña y, por tanto, los términos principales de las series anteriores solo dependes de r_0 y nos permitirá estimar la solución a partir solamente de la posición inicial sin necesidad de conocer el vector velocidad inicial. Obviamente, conociendo \mathbf{v}_0 , f y g se obtienen con total precisión.

Capítulo 4

El método de Gauss

4.1. Introducción al método de Gauss

Como ya hemos comentado anteriormente, determinar la órbita de un cuerpo celeste puede llegar a ser bastante complicado, ya que desde nuestro planeta solo podemos ver la dirección en la que se encuentra un astro en un momento determinado, pero no a qué distancia se encuentra. A esto hay que añadirle el movimiento de la Tierra, lo que dificulta aún más la tarea.

Es interesante describir el método usado por Kepler para encontrar la distancia de Marte, y por tanto, su órbita. El periodo sidéreo de Marte es conocido, así que tomando dos observaciones de Marte separadas temporalmente por un periodo sidéreo de Marte tal y como muestra la Figura 4.1, Marte habrá regresado al mismo punto en el Sistema Solar. Ya que Marte tarda 1.88 años terrestres en dar una vuelta completa al Sol, la Tierra habrá girado unos 677° , por lo tanto, el ángulo $\angle E_1SE_2$ es un ángulo conocido, así como la longitud del segmento E_1E_2 . Las observaciones nos proporcionan los ángulos $\angle E_2E_1M$ y $\angle E_1E_2M$. Por lo tanto se puede resolver el triángulo E_1E_2M y así hallar la distancia MS .

Este método es muy simple, pero el precio que hay que pagar es grande, ya que se requiere demasiado tiempo, varias revoluciones del planeta alrededor del Sol, para poder llevarlo a cabo. Gauss diseñó un método en el que únicamente

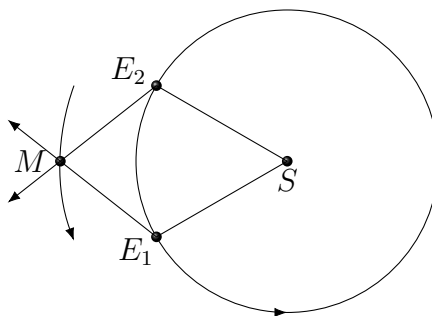


Figura 4.1: Método de Kepler para determinar la órbita de Marte.

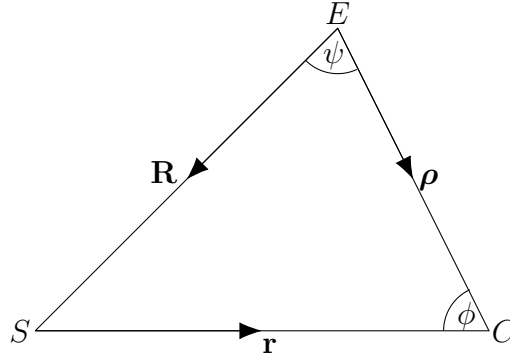


Figura 4.2: Geometría de los vectores de posición para una observación. S representa el Sol, E la Tierra y C el objeto observado.

eran necesarios seis ángulos para determinar una órbita con exactitud. Cada observación nos proporcionará dos ángulos, por lo que solamente necesitaremos tres observaciones

Empecemos por considerar la geometría de lo que se observa. Para ello, usaremos la notación que aparece en la Figura 4.2, donde nos referimos con E , S y C a La Tierra, el Sol y el astro respectivamente.

Lo que se conoce por observación es el vector unitario $\hat{\rho}$, que traza una curva en la esfera celeste, la cual supondremos de radio 1. Entonces

$$\frac{d\hat{\rho}}{ds} = \hat{\rho}' = \hat{\mathbf{t}},$$

donde s es el parámetro arco y $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector tangente a la curva en $\hat{\rho}$. Nótese que, al ser s el parámetro arco, $\hat{\mathbf{t}}$ es un vector unitario. Por otra parte $\hat{\rho} = 1$ por lo que

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = 1 \Rightarrow 2\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}' = 0.$$

Es decir, los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ son ortogonales. Sea ahora

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\rho} \times \hat{\mathbf{t}},$$

de forma que $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}})$ forman una base de vectores ortogonales y unitarios en \mathbb{R}^3 . Puesto que $\hat{\mathbf{t}}'$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$, entonces podemos escribir $\hat{\mathbf{t}}'$ de la siguiente forma

$$\hat{\mathbf{t}}' = \lambda \hat{\rho} + \kappa \hat{\mathbf{n}}.$$

Teniendo en cuenta que $\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$ y diferenciando, obtenemos que $\lambda = -1$.

Por otra parte,

$$\mathbf{r} + \mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

y, derivando dos veces respecto al tiempo,

$$\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \frac{ds}{dt} \hat{\mathbf{t}},$$

de donde resulta

$$\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + 2\dot{\rho}\frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{t}} + \rho\frac{d^2s}{dt^2}\hat{\mathbf{t}} + \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2(-\hat{\boldsymbol{\rho}} + \kappa\hat{\mathbf{n}}).$$

Multiplicando escalarmente por $\hat{\mathbf{n}}$ se obtiene

$$(\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{R}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa. \quad (4.1)$$

Puesto que, tanto la Tierra como el cuerpo celeste se mueven sujetos al campo gravitacional del Sol, se tiene que

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \ddot{\mathbf{R}} = -\mu\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

y entonces

$$\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{R}} = -\mu\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{R}}{R^3}\right) = -\mu\left(\frac{\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}}{r^3} + \frac{\mathbf{R}}{R^3}\right).$$

Si multiplicamos escalarmente la ecuación anterior por $\hat{\mathbf{n}}$ y sustituimos en (4.1) quedará lo siguiente

$$\mu\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{R^3}\right) \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa. \quad (4.2)$$

Por otra parte, considerando el triángulo SEC se tiene

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos\psi. \quad (4.3)$$

Las ecuaciones (4.3) y (4.2) constituyen la base de la determinación de la órbita del cuerpo celeste C . De hecho, en estas ecuaciones conocemos los vectores \mathbf{R} y $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, así como el ángulo ψ . A partir de tres observaciones podemos obtener ds/dt , $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ y κ , por lo que (4.3) y (4.2) constituyen un sistema de dos ecuaciones con incógnitas r y ρ . Resolviendo el sistema para cada una de las tres observaciones tendríamos tres vectores de posición y, por tanto, se pueden obtener los seis elementos orbitales. Sin embargo, el sistema de ecuaciones no puede resolverse si $\kappa = 0$, ya que las tres observaciones estarían sobre un círculo máximo y de ese modo no tendríamos seis ángulos observados independientes. Así pues, necesitaríamos más observaciones. También tendríamos problemas si κ fuese muy pequeño. Por lo tanto, la capacidad de determinar una órbita a partir de tres observaciones dependerá de lo que el arco observado se aleje de un círculo máximo.

4.2. Obtención de los vectores de posición

El método de Gauss consta de dos partes, en la primera se trata de obtener, a partir de tres observaciones, dos vectores de posición Sol-Astro \mathbf{r}_i . Para ello

vamos a utilizar las funciones f y g con el fin de llegar a una ecuación que nos permitirá obtener el vector \mathbf{r} en dos instantes de tiempo t_1 y t_3 .

Sean \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 los vectores de posición del astro con respecto al Sol, en los instantes t_1 , t_2 y t_3 de las tres observaciones, respectivamente. El método de Gauss comienza teniendo en cuenta que los vectores anteriores son coplanarios, al tratarse de una órbita kepleriana. Por tanto, uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los otros. Así pues, podemos poner \mathbf{r}_2 en función de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 como sigue

$$\mathbf{r}_2 = c_1 \mathbf{r}_1 + c_3 \mathbf{r}_3. \quad (4.4)$$

Ahora bien, como se dijo en la Sección 3.3, a partir de los vectores $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ y $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$, en un instante de tiempo t_0 , cualquier otro vector de posición \mathbf{r} , en un instante t , puede escribirse como combinación lineal de los anteriores

$$\mathbf{r} = f \cdot \mathbf{r}_0 + g \cdot \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (4.5)$$

donde f y g son las funciones descritas en 3.3.

Eligiendo el instante t_0 como el correspondiente a la segunda observación, t_2 , los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 pueden escribirse como

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = f_1 \cdot \mathbf{r}_2 + g_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2, \\ \mathbf{r}_3 = f_3 \cdot \mathbf{r}_2 + g_3 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

y, por tanto, (4.4) quedaría de la siguiente manera

$$\mathbf{r}_2 = c_1(f_1 \cdot \mathbf{r}_2 + g_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) + c_3(f_3 \cdot \mathbf{r}_2 + g_3 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) \quad (4.7)$$

La idea en la que se basa el método de Gauss es que, conocidos c_1 y c_3 , la ecuación (4.4) no es más que un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Así pues, una de las claves es poder determinar estas constantes c_1 y c_3 . Por un lado, podemos obtenerlos igualando coeficientes en (4.7) donde podemos ver que

$$c_1 f_1 + c_3 f_3 = 1, \quad c_1 g_1 + c_3 g_3 = 0$$

y entonces,

$$c_1 = \frac{g_3}{f_1 g_3 - g_1 f_3}, \quad c_3 = -\frac{g_1}{f_1 g_3 - g_1 f_3}. \quad (4.8)$$

Por otro lado, c_1 y c_3 pueden obtenerse de (4.4) multiplicando vectorialmente por \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 . En este sentido, c_1 y c_3 tienen una interpretación geométrica. En efecto, denotando por $[\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j]$ el área del triángulo formado por \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j , y $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ el área barrida por el radio vector entre los dos vectores, entonces

$$c_1 = \frac{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|} = \frac{[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]}{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3]} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3]}. \quad (4.9)$$

Es decir, c_1 es el cociente entre el área del triángulo definido por \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 y la del triángulo definido por \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 y un cociente similar aparece para c_3 . A

pesar de tener ya dos expresiones alternativas para c_1 y c_3 , conviene escribir (4.9) de una forma equivalente. Así, introducimos las cantidades y_1 , y_2 , y_3 que representan el cociente entre las áreas de los sectores elípticos barridos por el radio vector y el del triángulo correspondiente

$$y_1 = \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]}, \quad y_2 = \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)}{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3]}, \quad y_3 = \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}.$$

Entonces

$$c_1 = \frac{(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)} \frac{[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]}{(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)} \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)}{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3]} = \frac{(t_3 - t_2)}{t_3 - t_1} \frac{y_2}{y_1} \quad (4.10)$$

y

$$c_3 = \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)} \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)}{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3]} = \frac{(t_2 - t_1)}{t_3 - t_1} \frac{y_2}{y_3}, \quad (4.11)$$

donde hemos usado que el área barrida por el radio vector es proporcional al tiempo que tarda en barrerla. Notemos que si las observaciones están próximas en el tiempo, entonces $y_{1,2,3} \approx 1$ y tenemos una primera aproximación de c_1 y c_3 , que va a resultar la misma aproximación obtenida al considerar el primer término de las series para las funciones f y g dadas en (3.42).

Vamos a introducir ahora la posición del observador en (4.4), según la Figura 4.2, donde se ve que $\mathbf{r} + \mathbf{R} = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}}$, por lo tanto (4.4) quedará así

$$c_1 \rho_1 \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 - \rho_2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 + c_3 \rho_3 \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 = c_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + c_3 \mathbf{R}_3 \quad (4.12)$$

y, procediendo de la misma manera, el sistema (4.6) lo podemos reescribir como sigue

$$\begin{cases} f_1 \mathbf{r}_2 + g_1 \dot{\mathbf{r}}_2 = \rho_1 \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 - \mathbf{R}_1, \\ f_3 \mathbf{r}_2 + g_3 \dot{\mathbf{r}}_2 = \rho_3 \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 - \mathbf{R}_3, \\ \mathbf{r}_2 = \rho_2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 - \mathbf{R}_2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Fijémonos en la ecuación (4.12). En ella conocemos los vectores $\hat{\boldsymbol{\rho}}_j$ y \mathbf{R}_j , por lo que define un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 , siempre que supongamos conocidos c_1 y c_3 . Una vez obtenidos los valores de ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 , los tres vectores de posición \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 quedarán determinados. Para resolver (4.12) vamos a realizar un cambio de sistema referencia donde introduciremos nuevos ejes ξ , η y ζ . Elegiremos estos ejes de manera que ξ y η estén contenidos en el mismo plano que la primera y la tercera observación y el eje ζ sea perpendicular a los mismos (véase Fig:4.3), de manera que tendremos una base ortonormal. Notemos que ξ tiene la misma dirección que la primer observación y por tanto son paralelos, por ende $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}_1$.

El vector que define el eje η (Figura 4.3) está en el plano que contiene a $\hat{\boldsymbol{\rho}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}_3$ y es ortogonal a $\hat{\boldsymbol{\rho}}_1$. Por tanto

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times (\hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_1)}{|\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times (\hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_1)|} = \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}_3 - \hat{\boldsymbol{\rho}}_1(\hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_1)}{\sqrt{1 - (\hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_1)^2}}. \quad (4.14)$$

Para completar el triedro de vectores ortonormales

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \hat{\boldsymbol{\xi}} \times \hat{\boldsymbol{\eta}}. \quad (4.15)$$

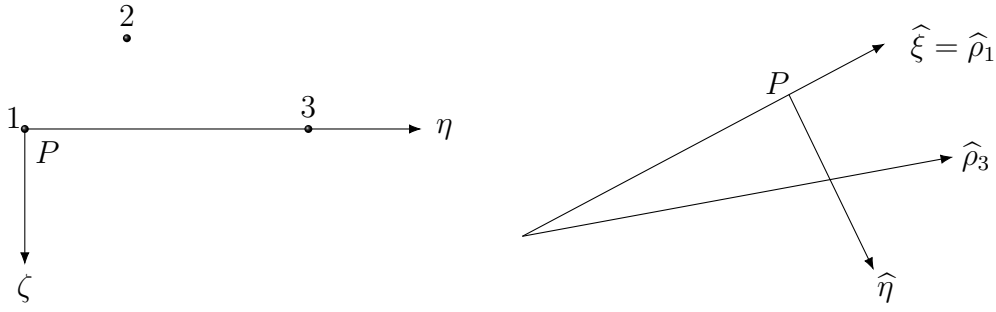


Figura 4.3: Sistema de referencia para resolver la ecuación (4.12).

Ahora, expresamos los vectores $\hat{\rho}_j$, $j = 1, 2, 3$, en el nuevo sistema de referencia, de manera que escribimos

$$\hat{\rho}_j = (\lambda_j, \mu_j, \nu_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Las nuevas coordenadas son las proyecciones de los vectores sobre los nuevos ejes, por lo tanto

$$\hat{\rho}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\rho}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_2 \cdot \hat{\xi} \\ \hat{\rho}_2 \cdot \hat{\eta} \\ \hat{\rho}_2 \cdot \hat{\zeta} \end{bmatrix}, \quad \hat{\rho}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \\ \nu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_3 \cdot \hat{\xi} \\ \hat{\rho}_3 \cdot \hat{\eta} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

Estamos ya en condiciones de resolver el sistema de ecuaciones (4.12). Partimos de unas aproximaciones de c_1 y c_3 , considerando solo el primer término de las series de las funciones f y g , o bien tomando los valores de $y_{1,2,3} = 1$ en (4.10) y (4.11). Así, si tomamos

$$\tau_1 = (t_1 - t_2), \quad \tau_2 = (t_3 - t_1), \quad \tau_3 = (t_3 - t_2).$$

resulta

$$c_1 = \frac{\tau_3}{\tau_3 - \tau_1} \quad \text{y} \quad c_3 = -\frac{\tau_1}{\tau_3 - \tau_1}. \quad (4.17)$$

Si las componentes de los vectores \mathbf{R}_j en el nuevo sistema de referencia son (X_j, Y_j, Z_j) , la tercera ecuación de (4.12), la correspondiente a la coordenada ζ , se escribe, teniendo en cuenta (4.16), como

$$-\rho_2 \nu_2 = c_1 Z_1 - Z_2 + c_3 Z_3 \quad (4.18)$$

y, por lo tanto, podemos expresar ρ_2 en función de c_1 y c_3 ,

$$\rho_2 = \frac{-c_1 Z_1 + Z_2 - c_3 Z_3}{\nu_2}. \quad (4.19)$$

De la misma manera podemos obtener ρ_3 de la componente η

$$\rho_3 = \frac{\rho_2 \mu_2 + c_1 Y_1 - Y_2 + c_3 Y_3}{c_3 \mu_3} \quad (4.20)$$

y ρ_1 de la componente ξ

$$\rho_1 = \frac{\rho_2 \lambda_2 - c_3 \rho_3 \lambda_3 + c_1 X_1 - X_2 + c_3 X_3}{c_1}. \quad (4.21)$$

Como vemos, la virtud de expresar los vectores en el nuevo sistema de referencia es equivalente a hacer triangular el sistema de ecuaciones (4.12), con lo que un sencillo procedimiento de marcha atrás nos permite obtener $\rho_{1,2,3}$. Con estos valores tenemos los vectores $\boldsymbol{\rho}_j$ y, finalmente, \mathbf{r}_j , ya que

$$\mathbf{r}_j = \boldsymbol{\rho}_j - \mathbf{R}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Pero este no es más que el primer paso de un proceso de aproximaciones sucesivas, ya que, con los vectores obtenidos, podemos tener una mejor aproximación de c_1 y c_3 usando un nuevo término de las series para f y g en (4.8) o bien usando las expresiones en (4.9). Con los nuevos valores c_1 y c_3 se repite el proceso. Notar también que se puede usar el sistema (4.13) para obtener $\dot{\mathbf{r}}_2$ y así poder usar más términos de las series para f y g . En cualquier caso, la convergencia del proceso iterativo depende, en gran medida, de que ν_2 no se aproxime excesivamente a cero. En ese caso, la ecuación (4.19) nos dará un valor poco preciso de ρ_2 y es más que posible que el método falle. Así pues, el método de Gauss es tanto más efectivo cuanto más se separe la segunda observación del plano $\psi - \eta$, como se indica en la parte izquierda de la Figura 4.3. Es decir, el método es efectivo cuanto más se separen las observaciones de un círculo máximo. Esta es la crítica que se le puede hacer al método de Gauss.

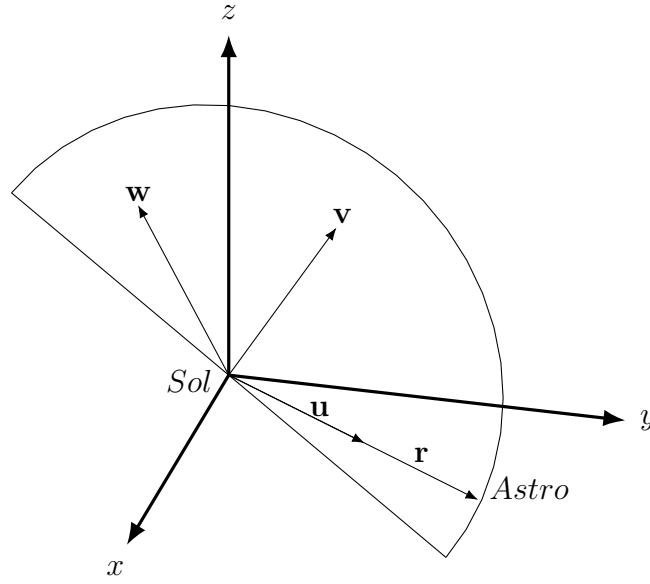
4.3. Cálculo de los elementos orbitales

Una vez tenemos los tres vectores \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 , correspondientes a las tres diferentes observaciones, el siguiente paso es calcular los elementos de la órbita. Este problema se conoce como *problema de Lambert* y consiste en, dadas dos posiciones, encontrar una órbita kepleriana que pase por dichos puntos. Aquí, cuando decimos kepleriana nos estamos refiriendo a que se deben satisfacer las leyes de Kepler, por lo que el problema no es equivalente a encontrar una cónica que pase por dos puntos, un problema mucho menos restrictivo.

Usaremos dos de las tres posiciones determinadas y tomaremos las dos que están separadas lo más posible en el tiempo, es decir, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 . Nótese que estos dos vectores están dentro del plano de la órbita y por tanto ambos definen dicho plano. Así pues, tanto el ángulo del nodo, Ω , como la inclinación de la órbita, i , se deducen de una forma directa. Así, consideramos el vector \mathbf{w} definido como

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}. \quad (4.22)$$

Es claro que el producto vectorial del vector unitario en la dirección del eje z y el vector \mathbf{w} es un vector que va en la dirección de la línea de los nodos (véase la Figura 4.4). Puesto que la tercera componente de \mathbf{w} es la proyección

Figura 4.4: Vectores unitarios \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} .

del mismo sobre el eje z , y el ángulo que forma con dicho eje es precisamente la inclinación de la órbita, resulta

$$\mathbf{w} = (\sin \Omega \sin i, -\cos \Omega \sin i, \cos i).$$

Así pues, los dos primeros elementos orbitales se obtienen a partir de las ecuaciones

$$i = \arccos w_3, \quad \sin \Omega = \frac{w_1}{\sin i}, \quad \cos \Omega = -\frac{w_2}{\sin i}.$$

El resto de elementos orbitales podría calcularse si conociéramos la anomalía verdadera en cada uno de los instantes de observación. Sin embargo, solo podemos conocer la diferencia entre ambos ángulos, que no es otra cosa que el ángulo formado por \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 . Sean r_1 y r_3 los módulos de los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 , entonces

$$\begin{aligned} \cos(v_3 - v_1) &= \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3}{r_1 r_3}, \\ \sin(v_3 - v_1) &= \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}{r_1 r_3}. \end{aligned}$$

Para determinar los cuatro elementos restantes serán necesarias cuatro ecuaciones en las que las incógnitas sean el semeje mayor, a , la excentricidad, e , el argumento del perihelio, ω y la época de paso T . Sin embargo esto no es sencillo y el recorrido que hay que hacer es un poco más largo. Así, en un primer paso se determinan a , e y las anomalías excéntricas E_1 y E_3 para luego obtener ω y T en un segundo paso.

El sistema de ecuaciones inicial que vamos a plantear necesita de unas variables auxiliares que son las siguientes

$$\begin{aligned} 2g &= E_3 - E_1 & 2G &= E_3 + E_1 \\ t &= t_3 - t_1 & 2v &= v_3 - v_1. \end{aligned}$$

Nótese que t y v son cantidades conocidas, mientras que g y G van a jugar el papel de incógnitas. En realidad g y G son equivalentes a las anomalías excéntricas, ya que

$$E_1 = G - g, \quad E_3 = G + g.$$

El sistema, al que denominaremos sistema de Gauss, pues en él se basó Gauss para el problema de la determinación de órbitas, es el siguiente

$$\sqrt{r_1 r_3} \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin g, \quad (4.23)$$

$$\sqrt{r_1 r_3} \cos v = a(\cos g - e \cos G), \quad (4.24)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t = 2g - 2e \cos G \sin g, \quad (4.25)$$

$$r_1 + r_3 = 2a(1 - e \cos G \cos g), \quad (4.26)$$

donde las incógnitas son a , e , g y G .

Estas ecuaciones se obtienen a partir de las relaciones del movimiento kepleriano que se ha visto en el capítulo 3. Por ejemplo, la ecuación (4.25) aparece a partir de la ecuación de Kepler. Así,

$$n(t_3 - T) = E_3 - e \sin E_3, \quad n(t_1 - T) = E_1 - e \sin E_1,$$

y restando ambas ecuaciones resulta (4.25). Para el resto de ecuaciones basta tener en cuenta la relación entre las dos parametrizaciones diferentes de la elipse, a saber

$$x = r \cos v = a \cos E - ae, \quad y = r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin v,$$

junto con $r = a(1 - e \cos E)$.

Este sistema podría resolverse mediante métodos numéricos, como el método de Newton, asumiendo unos valores aproximados para g , G , e y a de partida. Sin embargo, vamos a ver cómo procedió Gauss en su resolución, en una época en la que no existían ordenadores. En primer lugar, empezamos despejando $e \cos G$ de la ecuación (4.24) y sustituyendo el resultado obtenido en (4.25) y (4.26). Así, se tiene

$$\frac{\sqrt{\mu} t}{(a \sin^2 g)^{3/2}} = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} + \frac{2\sqrt{r_1 r_3} \cos v}{a \sin^2 g} \quad (4.27)$$

$$r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3} \cos v \cos g = 2a \sin^2 g. \quad (4.28)$$

Ahora despejamos sin g de la ecuación (4.23) del sistema de Gauss y lo sustituimos en las dos ecuaciones (4.27) y (4.28). De este modo llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\mu}t(a(1-e^2))^{3/2}}{(r_1r_3\sin^2 v)^{3/2}} = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} + \frac{2a(1-e^2)\cos v}{\sqrt{r_1r_3}\sin^2 v}, \\ r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1r_3}\cos v \left(1 - 2\sin^2 \frac{g}{2}\right) = 2r_1r_3(a(1-e^2))^{-1}\sin^2 v, \end{cases} \quad (4.29)$$

en el que las incógnitas son g y $a(1-e^2)$.

Para resolver el sistema (4.29), Gauss introdujo como variable el cociente entre las áreas del sector elíptico y el triángulo delimitado por los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_3 , como queda reflejado en la Figura 4.5. Ahora bien, por un lado, el área del triángulo viene dada por

$$A_T = \frac{1}{2}|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| = \frac{1}{2}r_1r_3\sin 2v.$$

Por otro lado, al cumplirse la ley de las áreas, el área barrida por el radio vector desde \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_3 dividida por el tiempo transcurrido entre ambos instantes es igual al área de la elipse dividida por el periodo, por lo que tendremos

$$\frac{A_E}{t} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P}.$$

Teniendo en cuenta que $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$, resulta

$$y = \frac{A_E}{A_T} = \frac{\sqrt{\mu}t\sqrt{a(1-e^2)}}{r_1r_3\sin 2v}, \quad (4.30)$$

y haciendo uso de (4.23), tenemos la expresión alternativa

$$y = \frac{\sqrt{\mu}t}{2\sqrt{a}\sqrt{r_1r_3}\cos v \sin g}. \quad (4.31)$$

Nótese que y es equivalente a $a(1-e^2)$.

Si dividimos la segunda ecuación del sistema (4.29) por $2\sqrt{r_1r_3}\cos v$ tenemos

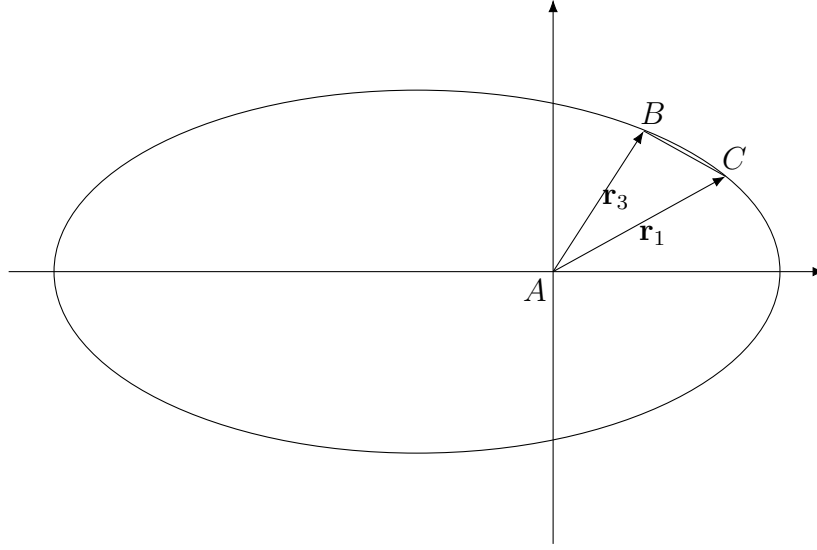
$$\frac{r_1 + r_3}{2\sqrt{r_1r_3}\cos v} - 1 + 2\sin^2 \frac{g}{2} = \sqrt{r_1r_3} \frac{\sin^2 v}{a(1-e^2)\cos v}. \quad (4.32)$$

Con el fin de simplificar esta expresión, Gauss introdujo dos constantes

$$m = \frac{\mu t^2}{(2\sqrt{r_1r_3}\cos v)^3}, \quad q = \frac{r_1 + r_3}{4\sqrt{r_1r_3}\cos v} - \frac{1}{2} \quad (4.33)$$

y una nueva variable

$$x = \sin^2 \frac{g}{2}, \quad (4.34)$$

Figura 4.5: Triángulo y sector elíptico ABC

de manera que (4.32) se escribe ahora como

$$y^2 = \frac{m}{q+x}. \quad (4.35)$$

Si introducimos la nueva variable

$$X = \frac{2g - \operatorname{sen} 2g}{\operatorname{sen}^3 g}, \quad (4.36)$$

y multiplicamos la primera ecuación de (4.29) por m , es fácil comprobar que entonces puede escribirse como

$$y^3 - y^2 = mX. \quad (4.37)$$

Así, las ecuaciones (4.35) y (4.37) son equivalentes a (4.29). A pesar de la simplicidad de la expresión de estas nuevas ecuaciones, su resolución es igualmente compleja. La manera en que Gauss afrontó su resolución es ingeniosas y se basa en un proceso de aproximaciones sucesivas. En primer lugar empezó por expresar X como una serie de potencias de x . Para lograr este objetivo consideró una ecuación diferencial ligando X y x . Esto puede conseguirse derivando las ecuaciones que definen x y X respecto a g . Haciendo esto llegamos a

$$3X \operatorname{sen}^2 g \cos g + \frac{\partial X}{\partial g} \operatorname{sen}^3 g = 4 \operatorname{sen}^2 g, \quad \frac{\partial x}{\partial g} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} g.$$

De aquí resulta la ecuación diferencial

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{8 - 6X \cos g}{\operatorname{sen}^2 g} = \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{2x(1 - x)}. \quad (4.38)$$

Si suponemos que X puede expresarse como serie de potencias de x , la ecuación diferencial (4.38) admite la siguiente solución

$$X = \frac{4}{3} \left[1 + \frac{6}{5}x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}x^2 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \dots \right] \quad (4.39)$$

Aunque Gauss introdujo algunos pasos intermedios, la idea para resolver el sistema de ecuaciones (4.35), (4.37) es como sigue. Consideramos la ecuación (4.35) reescrita de la siguiente forma

$$x = \frac{m}{y^2} - q, \quad (4.40)$$

junto con las ecuaciones (4.37) y (4.39). Ahora suponemos inicialmente que $y = 1$, pues el área del triángulo y el sector elíptico diferirán en una cantidad pequeña. Con esta suposición podemos calcular el valor de x con la ecuación (4.40) y a partir de ahí obtener X mediante (4.39). Con el valor de X , la ecuación (4.37) nos da un nuevo valor de y que usamos para repetir el proceso hasta que éste converja.

El proceso que acabamos de describir nos conduce a la determinación de x , X , y . Sin embargo, Gauss aún usó otros pasos intermedios para su resolución. En concreto, introdujo dos nuevas variables ξ y h mediante las siguientes expresiones

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}, \quad h = \frac{m}{\frac{5}{6} + q + \xi}. \quad (4.41)$$

A partir del desarrollo de X en potencias de x , dado en (4.39), podemos escribir también ξ como una serie de potencias de x , llegando a

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{52}{1575}x^3 + \dots \quad (4.42)$$

Con esto, se puede reescribir la ecuación (4.37) como

$$y^3 - y^2 = mX = \frac{\frac{10m}{9}}{\frac{5}{6} + \xi - x}. \quad (4.43)$$

Teniendo en cuenta la segunda expresión de (4.41) junto con (4.40) se obtiene una nueva expresión de la ecuación anterior

$$y^3 - y^2 = \frac{\frac{10h}{9}}{1 - \frac{h}{y^2}}. \quad (4.44)$$

Así pues, habremos obtenido un sistema equivalente a (4.35), (4.37)

$$\begin{cases} y^3 - y^2 - hy - \frac{h}{9} = 0, \\ x = \frac{m}{y^2} - q. \end{cases} \quad (4.45)$$

Para resolver el sistema deberemos proceder como hemos indicado anteriormente. Para comenzar, de acuerdo con la figura 4.5, supondremos $y = 1$, y

partiremos de un valor inicial $x = m - q$. Con este valor de x y la ecuación (4.42) obtendremos el valor de ξ , y con él, el de h . Esto nos permite obtener y de la primera ecuación del sistema (4.45) que, llevado a la segunda ecuación, nos proporciona un nuevo valor de x . Reiterando el proceso anterior podemos llegar hasta un valor de x cuyo error sea lo suficientemente pequeño. La ventaja de este esquema es que la serie correspondiente a ξ converge más rápido que la serie correspondiente a X , lo cual acelera el proceso.

Ahora que ya tenemos el valor de x podremos hallar g y G y, por tanto, las anomalías excéntricas en los instantes t_1 y t_3 . Para ello, debemos tener en cuenta que $g \in [0, \pi]$ y, a partir de la ecuación (4.34), tendremos

$$\cos g = 1 - 2x, \quad \sin g = \sqrt{4x(1-x)}, \quad (4.46)$$

que nos determina, sin ambigüedad el valor de g . Una vez conocidos y y g podremos obtener el valor del semieje mayor, a , de (4.31), de manera que se obtiene

$$a = \frac{t^2 \mu}{(2y\sqrt{r_3 r_1 \cos v \sin g})^2}. \quad (4.47)$$

Usando la ecuación (4.23) encontraremos el valor de la excentricidad, e , de manera que

$$e = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 g - r_1 r_3 \sin^2 v}}{a \sin g}.$$

Para determinar los dos elementos orbitales restantes, nos valdremos de las siguientes expresiones, que nos van a permitir el cálculo de G

$$\begin{aligned} r_3 + r_1 &= 2a(1 - e \cos G \cos g), \\ r_3 - r_1 &= 2ae \sin G \sin g. \end{aligned}$$

De aquí se deducen las igualdades

$$e \cos G = \frac{2a - (r_3 + r_1)}{2a \cos g}, \quad e \sin G = \frac{r_3 - r_1}{2a \sin g}.$$

Por tanto, podremos hallar el ángulo G y, junto con g , obtener las anomalías excéntricas E_1 y E_3 .

Una vez obtenidas E_1 y E_3 , las anomalías verdaderas v_1 y v_3 podrán calcularse a partir de la siguiente expresión, que se obtiene sin mayor dificultad usando (3.19) y (3.26),

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (4.48)$$

Definamos ahora dos vectores que nos serán útiles a la hora de obtener el argumento del perihelio, ω . Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores tal que \mathbf{u} es el vector unitario que va en la dirección del vector de posición, y \mathbf{v} un vector ortonormal a \mathbf{u} y \mathbf{w} , dado por (4.22), tal que $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$. Ahora bien, para el vector \mathbf{u} resulta

$$\mathbf{u} = (\cos(\omega + v) \cos \Omega, \cos(\omega + v) \sin \Omega, \sin(\omega + v) \sin i).$$

De este modo, si \mathbf{u}_1 , \mathbf{v}_1 y \mathbf{u}_3 , \mathbf{v}_3 son los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en los instantes t_1 y t_3 respectivamente, la tercera componente de estos vectores resultan ser

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{13} &= \sin i \sin(v_1 + \omega), & \mathbf{u}_{33} &= \sin i \sin(v_3 + \omega), \\ \mathbf{v}_{13} &= \sin i \cos(v_1 + \omega), & \mathbf{v}_{33} &= \sin i \sin(v_3 + \omega), \end{aligned}$$

de donde es posible obtener, sin ambigüedad, ω . En concreto, tenemos

$$\omega_1 = \arctan\left(\frac{\mathbf{u}_{13}}{\mathbf{v}_{13}}\right) - v_1, \quad \omega_3 = \arctan\left(\frac{\mathbf{u}_{33}}{\mathbf{v}_{33}}\right) - v_3.$$

Notemos que se obtienen dos posibles valores. Si el método está bien definido, estos dos valores no deberían diferir mucho, de manera que obtendremos valores consistentes entre sí. De otro modo, habría que seleccionar otras observaciones y volver a iniciar el proceso.

Por último, también se obtienen dos épocas de paso T_1 y T_3 , que hallaremos a partir de la ecuación de Kepler. En este sentido, se deduce que

$$T_1 = t_1 - \frac{E_1 - e \sin E_1}{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}}, \quad T_3 = t_3 - \frac{E_3 - e \sin E_3}{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}}.$$

Al igual que antes, estos valores deben ser consistentes para que el método dé lugar a una órbita realista.

4.4. Cálculo de una órbita con más de tres observaciones. El método de Herget

El método de Gauss para la determinación de órbitas, a partir de tres observaciones, consigue que estas tres observaciones se satisfagan, pero no asegura que el resto de ellas se ajusten a la órbita calculada. Es decir, la órbita calculada por el método de Gauss no es más que una órbita preliminar que debe mejorarse para que se ajuste lo más posible al conjunto de observaciones que se tiene. Para ello se usan los denominados métodos de corrección de órbitas, que ya el propio Gauss ideó y le condujo al método de mínimos cuadrados. En esta Memoria no vamos a describir estos procedimientos, sino que vamos a ver un método que, de alguna manera, tiene en cuenta todo esto desde el principio. Es el llamado método de Herget [5]

Para comenzar, consideraremos un conjunto de n observaciones en los instantes de tiempo t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, de manera que

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_i = (\cos \delta \cos \alpha_i, \cos \delta \sin \alpha_i, \sin \delta_i),$$

donde (α_i, δ_i) son las coordenadas absolutas ecuatoriales correspondientes a la observación en el instante t_i . Ya hemos visto, como queda reflejado en la

Figura 4.2, que $\mathbf{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{R}$, por lo que tendremos lo siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \rho_1\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 - \mathbf{R}_1, \\ \mathbf{r}_2 = \rho_2\hat{\boldsymbol{\rho}}_2 - \mathbf{R}_2, \\ \vdots \\ \mathbf{r}_i = \rho_i\hat{\boldsymbol{\rho}}_i - \mathbf{R}_i, \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n-1} = \rho_{n-1}\hat{\boldsymbol{\rho}}_{n-1} - \mathbf{R}_{n-1}, \\ \mathbf{r}_n = \rho_n\hat{\boldsymbol{\rho}}_n - \mathbf{R}_n. \end{cases} \quad (4.49)$$

La idea del método es establecer un compromiso entre dos ideas: por un lado que haya dos observaciones, cuidadosamente elegidas, que se satisfagan de manera exacta y, por otro, que se minimice el error en el resto de observaciones. Supongamos que las observaciones que van a verificarse de manera exacta son las correspondientes a los instantes de tiempo t_1 y t_n , que no necesariamente tienen que corresponder con el instante de la primera de las observaciones (la más antigua) y de la última (la más moderna). Así, partiendo de unos valores para ρ_1 y ρ_n se definirá un esquema iterativo, variando estas cantidades, hasta conseguir que se satisfagan de manera exacta la primera y la última ecuación del sistema (4.49), minimizando el error en el resto.

Si ρ_1 y ρ_n tiene unos valores conocidos, podemos hallar los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_n . El resto de vectores de posición, \mathbf{r}_i , podríamos calcularlos a partir de las funciones f y g , pero para ello es necesario el vector velocidad en uno de los instantes de tiempo t_1 o t_n . Para calcular la velocidad en dicho instante podemos considerar otra observación separada de la inicial por un intervalo de tiempo Δt y tomar como aproximación de $\dot{\mathbf{r}}$ que el cuerpo celeste se mueve con velocidad constante y en línea recta, es decir

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Tras esta primera aproximación podemos ir refinando el valor de la velocidad por aproximaciones sucesivas o utilizar el método de Herrick y Liu [4].

Obviamente, los valores obtenidos para \mathbf{r}_i no verificarán las ecuaciones (4.49), por lo que es preciso cuantificar los errores cometidos, o lo que es lo mismo cuánto se desvía el miembro de la izquierda de cada ecuación del de la derecha. Con este objetivo, introducimos los vectores \mathbf{A}_i y \mathbf{D}_i , que definimos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= (-\sin \alpha_i, \cos \alpha_i, 0), \\ \mathbf{D}_i &= (-\sin \delta_i \cos \alpha_i, -\sin \delta_i \sin \alpha_i, \cos \delta_i), \end{aligned} \quad (4.50)$$

los cuales forman, para cada $i = 2, 3, \dots, n-1$, una base de vectores ortogonales junto con $\hat{\boldsymbol{\rho}}_i$. Sean,

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(\rho_1, \rho_n) = (\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{A}_i, \\ Q_i &= Q_i(\rho_1, \rho_n) = (\mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{D}_i, \end{aligned} \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (4.51)$$

que podemos ver como los residuos de las observaciones desde t_2 hasta t_{n-1} en ascensión recta y declinación y que serán función de ρ_1 y ρ_n . En caso de que las observaciones fueran exactas, P_i y Q_i deberían ser cero. Así pues, este problema se reduce a la búsqueda de unos valores para ρ_1 y ρ_n para los que P_i y Q_i sean lo más pequeño posible.

El método comienza bajo la hipótesis de que las ecuaciones anteriores son igual a 0 para valores apropiados de ρ_1 y ρ_n . Sin embargo, nosotros hemos partido de unos valores aproximados ρ_1^* y ρ_n^* que deberemos corregir para llegar a los exactos. Llamemos a estas correcciones $\Delta\rho_1 = \rho_1 - \rho_1^*$ y $\Delta\rho_n = \rho_n - \rho_n^*$. Por lo que en un caso ideal tendríamos

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(\rho_1^* + \Delta\rho_1, \rho_n^* + \Delta\rho_n) = 0, \\ Q_i &= Q_i(\rho_1^* + \Delta\rho_1, \rho_n^* + \Delta\rho_n) = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Desarrollando en serie de Taylor hasta primer orden, el sistema anterior se reduce a uno lineal, de manera que se tiene

$$\begin{aligned} P_i(\rho_1^*, \rho_n^*) + \frac{\partial P_i}{\partial \rho_1} \Delta\rho_1 + \frac{\partial P_i}{\partial \rho_n} \Delta\rho_n &= 0, \\ Q_i(\rho_1^*, \rho_n^*) + \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_1} \Delta\rho_1 + \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_n} \Delta\rho_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Como vemos, en estas ecuaciones intervienen las derivadas parciales de P_i y Q_i respecto a ρ_1 y ρ_n , las cuales podemos aproximar por medio de fórmulas de diferenciación numérica

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial \rho_1} &\simeq \frac{P_i(\rho_1 + \Delta, \rho_n) - P_i(\rho_1 - \Delta, \rho_n)}{2\Delta}, \\ \frac{\partial P_i}{\partial \rho_n} &\simeq \frac{P_i(\rho_1, \rho_n + \Delta) - P_i(\rho_1, \rho_n - \Delta)}{2\Delta}, \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_1} &\simeq \frac{Q_i(\rho_1 + \Delta, \rho_n) - Q_i(\rho_1 - \Delta, \rho_n)}{2\Delta}, \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_n} &\simeq \frac{Q_i(\rho_1, \rho_n + \Delta) - Q_i(\rho_1, \rho_n - \Delta)}{2\Delta}. \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta, el sistema (4.53) es un sistema lineal de la siguiente forma

$$\begin{cases} b_1 + a_{11}\Delta\rho_1 + a_{12}\Delta\rho_n = 0, \\ b_2 + a_{21}\Delta\rho_1 + a_{22}\Delta\rho_n = 0, \\ \vdots \\ b_k + a_{k1}\Delta\rho_1 + a_{k2}\Delta\rho_n = 0. \end{cases} \quad (4.54)$$

con $k = 2n - 4$. Estas ecuaciones se conocen como *ecuaciones de condición* y lo normal es que se trate de un sistema incompatible, de manera que las ecuaciones no se satisfagan. Cada una de ellas tendrá un residuo asociado que será el siguiente

$$\phi_i(\Delta\rho_1, \Delta\rho_n) = b_i + a_{i1}\Delta\rho_1 + a_{i2}\Delta\rho_n, \quad (4.55)$$

para $i = 1, 2, \dots, k$.

La idea, ahora, es usar el método de mínimos cuadrados para encontrar los mejores valores para $\Delta\rho_1$ y $\Delta\rho_n$ que hagan mínima la suma de los cuadrados de los residuos,

$$\Phi(\Delta\rho_1, \Delta\rho_n) = \sum_{i=1}^k \phi_i^2 = \sum_{i=1}^k (b_i + a_{i1}\Delta\rho_1 + a_{i2}\Delta\rho_n)^2. \quad (4.56)$$

Una condición necesaria para que (4.56) sea mínimo, es que las derivadas parciales de Φ respecto a $\Delta\rho_1$ y $\Delta\rho_n$ sean cero. Así pues, derivando, encontraremos las llamadas *ecuaciones normales* que son las siguientes

$$\sum_{i=1}^k a_{i1}(b_i + a_{i1}\Delta\rho_1 + a_{i2}\Delta\rho_n) = 0, \quad \sum_{i=1}^k a_{i2}(b_i + a_{i1}\Delta\rho_1 + a_{i2}\Delta\rho_n) = 0 \quad (4.57)$$

y de ellas podremos obtener $\Delta\rho_1$ y $\Delta\rho_n$

En resumen, partiendo de ρ_1^* y ρ_n^* conocidos, podremos obtener unos valores corregidos a partir del sistema normal. Con estos nuevos valores se itera el proceso hasta conseguir la convergencia.

El único problema del método de Herget es la estimación de los valores iniciales de ρ_1 y ρ_n que puede requerir del uso del método de Gauss. En cualquier caso, una vez dados los valores iniciales, el método tiene en cuenta todas las observaciones y no solo un subconjunto de tres de ellas. En cierto modo es una especie de método de corrección de órbitas y, como tal, nos encontramos con un problema de minimización de residuos, basada en el método de mínimos cuadrados.

Conclusión

Nunca me había parado a pensar en cómo se calculaba una órbita, la gran mayoría de la gente sabe que son elípticas, conoce las leyes de Kepler, o al menos, ha oído hablar de ellas. Sin embargo, hasta que no comencé esta memoria no me había dado cuenta de que realmente es algo complejo. Tenía la idea de que quería elegir un tema distinto, algo relacionado con la Astronomía y he de decir que la elección de este tema me ha dejado bastante satisfecha ya que he podido utilizar varias nociones que he aprendido a lo largo de estos años durante la carrera, como es el cálculo con vectores, métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales, técnicas para aproximar soluciones mediante desarrollos en serie, etc. También me ha dado la oportunidad de conocer nociones básicas sobre el movimiento planetario y Astronomía. Ha sido un reto para mí tener que sacar información de textos escritos en inglés, ya que a veces su interpretación me fue un poco costosa. Aunque hoy en día se utilicen métodos más modernos y todos los cálculos se elaboren mediante ordenadores, me parece bonita la idea de conocer cuáles fueron los métodos iniciales en los que, sin lugar a dudas, se basan los actuales, en una época en la que la tecnología no estaba a la orden del día.

Bibliografía

- [1] A. Abad, J. A. Docobo, A. Elipe, *Curso de Astronomía*. Prensas Universitarias de Zaragoza. Zaragoza, 2002.
- [2] D. Brouwer, G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press. New York, 1961.
- [3] R. Cid, *Curso de Astronomía*, Universidad de Zaragoza. Zaragoza, 1970.
- [4] J.M.A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Willmann-Bell, Richmond, 1989.
- [5] P. Herget, Computation of Preliminary Orbits, *The Astronomical Journal*, **70**, 1–2, 1965.
- [6] J. Tennenbaum, B. Director, How Gauss determined the orbit of Ceres, *The American Almanac*, December 15 and 22, 1997.